

## Zaman Domeninde SWG Bazlarından Saçılan Alanların Analitik Hesabı

Mahmut Akkuş, Fatih Dikmen, H. Arda Ülkü, A. Arif Ergin\*  
Gebze Teknik Üniversitesi  
Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Gebze  
[makkus@gtu.edu.tr](mailto:makkus@gtu.edu.tr), [dikmen@gtu.edu.tr](mailto:dikmen@gtu.edu.tr), [haulku@gtu.edu.tr](mailto:haulku@gtu.edu.tr)

\*Yeditepe Üniversitesi  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
İstanbul  
[arif.ergin@yeditepe.edu.tr](mailto:arif.ergin@yeditepe.edu.tr)

**Özet:** Önceki çalışmalarda, darbe biçiminde uyarılmış Schaubert-Wilton-Glisson (SWG) baz fonksiyonlarından kaynaklanan gecikmeli potansiyellerin kapalı form ifadeleri geliştirilmiştir. Bu çalışmada ise, bu ifadelerin polinom zaman bazları ile konvolüsyonunun analitik olarak alınabileceği gösterilmiştir. Ayrıca, potansiyellere uygulanan gradyan ve rotasyonel işlemleri sonucu, tetrahedral integral bölgeleri üçgen bölgelere indirgenebilmektedir ve bu sayede Rao-Wilton-Glisson (RWG) bazları için geliştirilmiş olan yöntemler kullanılabilir. Tüm bunların kullanılması sayesinde, SWG ve polinom zaman bazı çiftinden oluşan bir akı yoğunluğu elemanın, saçılan alanlara yaptığı katkının zaman domeninde analitik olarak hesaplanabileceği gösterilmiştir.

**Abstract:** It is shown in this work that, previously developed closed form expressions of retarded time potentials due to impulsively excited Schaubert-Wilton-Glisson (SWG) bases, can be analytically convolved with polynomial time bases. Also, gradient and curl operations on potentials makes it possible to reduce tetrahedral integral domains to triangular domains, which can be analytically calculated using methods developed for Rao-Wilton-Glisson (RWG) bases. Using all these, an analytical way of calculating time domain contributions to scattered fields from a flux density element, that consists of an SWG and polynomial time basis pair, is presented.

### 1. Giriş

Elektrik ve manyetik özellikleri homojen olmayan bir cismin saçılım analizini hacim integral denklemler ile gerçekleştirmek için, hacim eşdeğerlik prensibi kullanılmaktadır [1]. Bu, hacimsel eşdeğer elektrik/manyetik yük ve akım yoğunluklarını, ayrıca skaler elektrik/manyetik potansiyel  $\{\Phi/\Psi\}(\vec{r}, t)$  ve vektör manyetik/elektrik potansiyel  $\{\vec{A}/\vec{F}\}(\vec{r}, t)$ 'i ortaya çıkarmaktadır. Cisimden saçılan alanlar, bu potansiyellere bağlı terimlerle aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedirler:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \nabla \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \vec{H}_s(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{F}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \nabla \Psi(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

Saçılan alanlardaki potansiyellere bağlı bu terimler, yalnızca elektrik ve manyetik akı yoğunlukları  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  ve  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 'ye bağlı integraller olarak, zamanda gecikmeli formda ifade edilebilirler [1].  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  ve  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  akı yoğunlukları, uzamsal boyutlarında  $\vec{f}_n(\vec{r})$  SWG bazlarına [2], zaman boyutunda ise  $T_p(t)$  polinom bazlarına açılabilirler.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \sum_p \sum_n D_{p,n} T_p(t) \vec{f}_n(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_p \sum_n B_{p,n} T_p(t) \vec{f}_n(\vec{r}) \quad (2)$$

Bu durumda, saçılan alanın potansiyellere bağlı terimlerine, p'inci zaman bazından ve n'inci SWG bazının a'ıncı tetrahedronundan ( $V_{n,a}$ ) gelen katkılar aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$\frac{1}{\mu_0 \kappa_{n,a}} \frac{\partial \vec{A}_{p,n,a}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \tau_{n,a}} \frac{\partial \vec{F}_{p,n,a}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_p(t)}{\partial t^2} * \iiint_{V_{n,a}} \vec{f}_{n,a}(\vec{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (3)$$

$$-\frac{\epsilon_0}{\kappa_{n,a}} \nabla \Phi_{p,n,a}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{\tau_{n,a}} \nabla \Psi_{p,n,a}(\vec{r}, t) = T_p(t) * \nabla \iiint_{V_{n,a}} \nabla' \cdot \vec{f}_{n,a}(\vec{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (4)$$

$$-\frac{1}{\epsilon_0 \tau_{n,a}} \nabla \times \vec{F}_{p,n,a}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \kappa_{n,a}} \nabla \times \vec{A}_{p,n,a}(\vec{r}, t) = \frac{\partial T_p(t)}{\partial t} * \nabla \times \iiint_{V_{n,a}} \vec{f}_{n,a}(\vec{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (5)$$

Bu 3 hacim integralli ve konvolüsyonlu ifadeden (4) ve (5), diverjans teoremi gibi vektör cebri özdeşlikleri kullanılarak yüzey integrali haline getirilebilmekte, [3-4]'teki yöntemler kullanılarak analitik olarak hesaplanabilmektedirler. (3) için ise, literatürde henüz analitik bir çözüm yöntemi yoktur. Bu çalışmamızda, (3) için analitik bir çözüm yöntemi önerilmiş, böylece zaman domeninde SWG ve polinom zaman bazı çiftinden oluşan bir akı yoğunluğu elemanından saçılan alanların analitik olarak hesaplanabileceği gösterilmiştir.

## 2. Analitik Yöntem

Önceki çalışmalardan [5]'te, (3) içerisindeki hacim integrali incelenmiş, küre-tetrahedron kesişim katı açısı ve ortalama vektörü şeklindeki geometrik büyüklüklere indirgenmiştir. Ardından [6]'da, bu geometrik büyüklüklerin hesabı için "Gözlem Tetrahedronları" (GT) yöntemi geliştirilmiş, kapalı formda analitik ifadeler türetilmiştir. Bu çalışmada ise, (3)'teki polinom zaman bazlarıyla yapılan konvolüsyonun analitik hesabının, farklı bir geometrik bakış açısıyla ve GT yöntemi kullanılarak gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir.

Polinom zaman bazlarının her bir terimi,  $t$ 'nin kuvvetlerine bağlıdır. Bu sebeple (3)'teki konvolüsyonun analitik hesabı, katı açı  $\Omega(ct)$  ve ortalama vektör  $\vec{m}(ct)$  büyüklüklerinin  $t$ 'nin kuvvetleri ile çarpımının belirsiz integralini bulmayı gerektirmektedir. Tamamen geometrik büyüklükler üzerinden gitmek adına  $ct = |\vec{r} - \vec{r}'| = R$  ikamesini yapacak olursak, bu belirsiz integralleri şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$I_n^{(1)}(R) \triangleq \int R^n \Omega(R) dR \quad \vec{I}_n^{(2)}(R) \triangleq \int R^n \vec{m}(R) dR \quad (6)$$

Standart analiz yöntemleriyle bu integrallerin alınması mümkün görünmemektedir. Çünkü  $\Omega(R)$  ve  $\vec{m}(R)$ 'nin kapalı formdaki ifadeleri oldukça karmaşıktır. Ancak, farklı bir geometrik bakış açısı ile bu integralleri almak mümkün hale gelmektedir. Öncelikle,  $\Omega(R)$  ve  $\vec{m}(R)$ 'nin küre yüzeyi ( $\partial S$ ) - tetrahedron hacmi ( $V$ ) kesişimi ( $V \cap \partial S$ ) üzerinden alınan integraller olduklarını hatırlayalım.

$$\Omega(R) \triangleq \frac{1}{R^2} \iint_{V \cap \partial S} dS' \quad \vec{m}(R) \triangleq \frac{1}{R^3} \iint_{V \cap \partial S} (\vec{r}' - \vec{r}) dS' \quad (7)$$

Açıkça görülmektedir ki, bu ifadeleri (6)'da yerine koyacak olursak, (6)'daki integraller hacim integrali olurlar ve küre - tetrahedron kesişim hacmi ( $V \cap S$ ) üzerinden alınan integraller şeklinde yazılabilirler.

$$I_n^{(1)}(R) = \iiint_{V \cap S} R^{n-2} dV' \quad \vec{I}_n^{(2)}(R) = \iiint_{V \cap S} R^{n-3} (\vec{r}' - \vec{r}) dV' \quad (8)$$

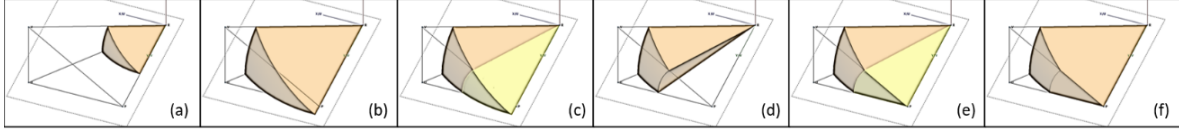
(6)'daki integraller, (8)'deki gibi hacim integrali olarak ele alındıklarında, integrandlar oldukça basitleşmektedir ve integrallerin GT yöntemi kullanılarak analitik olarak hesaplanmaları mümkün olmaktadır. SWG tetrahedronunun yüz indisi  $i \in \{1,2,3,4\}$ ,  $i$ 'inci yüzün kenar indisi  $j \in \{1,2,3\}$ ,  $i$ 'inci yüzün  $j$ 'inci kenarının köşe indisi  $k \in \{1,2\}$  olsun. Kürenin yarıçapı  $R$  ve merkezi  $\vec{r}$  olmak üzere,  $\vec{r}'$ 'nin  $i$ 'inci yüze izdüşümü  $\vec{p}_i$ ,  $\vec{p}_i$ 'nin  $j$ 'inci kenara izdüşümü  $\vec{u}_{ij}$ ,  $j$ 'inci kenarın  $k$ 'inci köşesi  $\vec{v}_{ijk}$  olsun. Bu noktalarla, köşe noktaları  $\{\vec{r}, \vec{p}_i, \vec{u}_{ij}, \vec{v}_{ijk}\}$  olan 24 adet GT elde edilmektedir. GT'lerin tetrahedral bölgelerini  $V_{ijk}$  olarak belirtelim.  $i$ 'inci yüzün SWG tetrahedronu içine bakan normal  $\hat{g}_i$ ,  $\vec{r}'$ 'nin bulunduğu tarafa bakan normal  $\hat{h}_i$  olsun. Bu yüzün  $j$ 'inci kenarının; yüzün  $j$ 'inci kenarında bulunmayan 3. köşesine bakan normal  $\hat{k}_{ij}$ ,  $\vec{p}_i$  tarafına bakan normal ise  $\hat{l}_{ij}$  olsun. Bu kenarın  $k$ 'inci köşesinden diğer köşesine bakan yön  $\hat{m}_{ijk}$ ,  $\vec{u}_{ij}$  noktaya bakan yön ise  $\hat{n}_{ijk}$  olsun. Bu tanımlamalar kullanılarak, (8)'deki integraller, GT'lerden gelen katkıların toplamı olarak şu şekilde yazılabilirler:

$$\begin{bmatrix} I_n^{(1)}(R) \\ \vec{I}_n^{(2)}(R) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \hat{g}_i \cdot \hat{h}_i \sum_{j=1}^3 \hat{k}_{ij} \cdot \hat{l}_{ij} \sum_{k=1}^2 \hat{m}_{ijk} \cdot \hat{n}_{ijk} \iiint_{V_{ijk} \cap S} \left[ R^{n-2} \right] dV' \quad (9)$$

GT'lerin bir köşesinin mutlaka küre merkezinde, yani gözlem noktası  $\vec{r}'$ 'de bulunması ve diğer köşelerinin dikme indirilerek belirlenmesi sebebiyle, bunların küreyle keşimi basit geometrik bölgelere ayrıştırılabilmekte ve bu bölgeler üzerinden (9)'daki integraller kolayca alınabilmektedirler. Bu temel bölgeleri, yarıçap  $R$ 'nin 4 farklı aralıkta aldığı değerler için şu şekilde verebiliriz;

- 1)  $0 < R < |\vec{p}_i - \vec{r}|$  aralığında,  $V_{ijk} \cap S$  kesişim bölgesi üçgensel bir küre dilimidir (Şekil 1.a).
- 2)  $|\vec{p}_i - \vec{r}| < R < |\vec{u}_{ij} - \vec{r}|$  aralığında, bu üçgensel küre diliminin konik şapka kısmı GT dışına çıkmaktadır. İçeride kalan bölge, üçgensel küre diliminden konik küre diliminin çıkarılması ve konik bölgenin eklenmesi şeklinde verilebilir (Şekil 1.b-f).

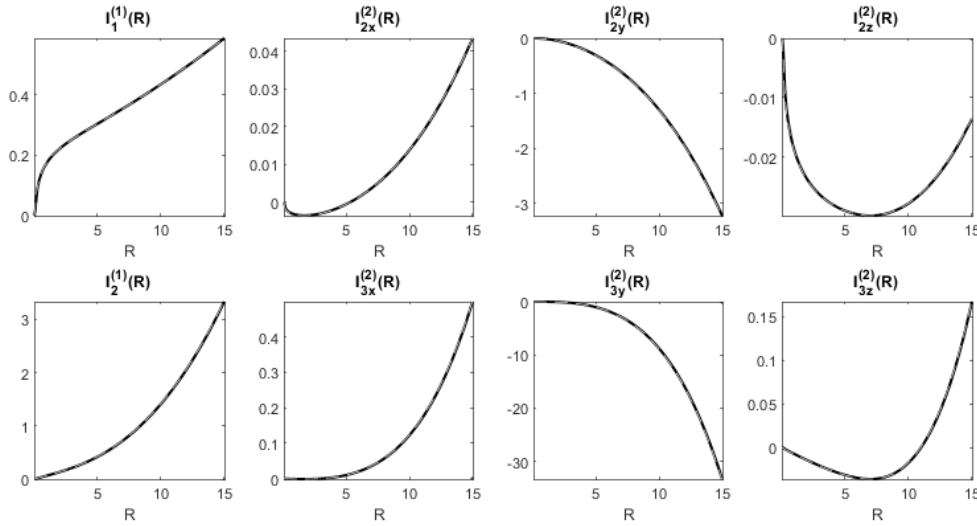
- 3)  $|\vec{u}_{ij} - \vec{r}| < R < |\vec{v}_{ijk} - \vec{r}|$  aralığında, kürenin  $\{\vec{u}_{ij}, \vec{v}_{ijk}\}$  doğru parçasında kestiği nokta  $\vec{a}_{ijk}$  olsun. Bu sefer içeride kalan bölge,  $\{\vec{r}, \vec{p}_i, \vec{u}_{ij}, \vec{a}_{ijk}\}$  tetrahedronunun tamamı, ve buna ek olarak  $\{\vec{r}, \vec{p}_i, \vec{a}_{ijk}, \vec{v}_{ijk}\}$  tetrahedronu ile kürenin kesişimidir.  $\{\vec{r}, \vec{p}_i, \vec{a}_{ijk}, \vec{v}_{ijk}\}$  tetrahedronu ile kürenin kesişim bölgesi, yine bir önceki adımda olduğu gibi, üçgensel küre diliminden konik küre diliminin çıkarılması ve konik bölgenin eklenmesi şeklinde olmaktadır.
- 4)  $|\vec{v}_{ijk} - \vec{r}| < R < \infty$  aralığında, küre tüm GT'yi kapsamaktadır, kesişim bölgesi  $V_{ijk}$ 'nin tamamıdır.



Şekil 1. Kesişim hacminin basit şekillerin kombinasyonu ile ifadesi.

### 3. Nümerik Sonuçlar

Zaman bazının 3. dereceden bir polinom olarak seçildiğini varsayalım. Bu durumda  $I_1^{(1)}(R)$ ,  $I_2^{(1)}(R)$ ,  $\tilde{I}_2^{(2)}(R)$  ve  $\tilde{I}_3^{(2)}(R)$  integrallerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu integraller; köşeleri  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,20,0)$ ,  $(0,0,1)$  noktalarında bulunan bir tetrahedron ve  $\vec{r} = (0.1, 15, 0.2)$ 'deki gözlem noktası için, hem analitik hem de nümerik olarak hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Nümerik hesapta, [6]'daki analitik  $\Omega(R)$  ve  $\vec{m}(R)$  formülleri 256 noktada örneklenerek (6)'daki integraller nümerik olarak alınmıştır. Analitik olarak ise (9)'daki integraller yukarıda açıklanan geometrik bölgelerin hacimleri üzerinden alınarak hesaplanmıştır. Şekil 2'de görüldüğü gibi, iki yöntemden gelen sonuçlar birbiriyle tamamen uyusmaktadır.



Şekil 2. Hesaplanan integraller. Siyah düz çizgi analitik, gri tireli çizgi nümerik sonuçları göstermektedir.

### Kaynaklar

- [1]. J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1941.
- [2]. D. H. Schaubert, D. R. Wilton, ve A. W. Glisson, "A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt.32, no.1, s.77-85, Ocak 1984.
- [3]. A. C. Yücel ve A. A. Ergin, "Exact evaluation of retarded-time potential integrals for the RWG bases," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt.54, no.5, s.1496-1502, Mayıs 2006.
- [4]. H. A. Ülkü ve A. A. Ergin, "Analytical evaluation of transient magnetic fields due to RWG current bases," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt.55, no.12, s.3565-3575, Aralık 2007.
- [5]. H. A. Ülkü, A. A. Ergin, ve F. Dikmen, "On the evaluation of retarded-time potential integrals for the SWG bases," IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., cilt.10, s.187-190, 2011.
- [6]. F. Dikmen, "On analytical evaluation of retarded-time potentials for SWG bases", IEEE Trans. Antennas Propag., cilt.62, no.9, s.4860-4863, Eylül 2014.